

ÉLECTROMAGNÉTISME

L'imagerie médicale a besoin de champ magnétique intense, permanent et uniforme. On se propose ici de dimensionner une bobine dans laquelle règne un champ magnétique de 2 T.

Partie I

MESURE DE CONDUCTIVITE

Les mesures de conductivité sont en général menées sur des échantillons plans dont l'épaisseur constante ε est faible devant les autres longueurs intervenant dans le problème. Le matériau considéré est du cuivre de conductivité γ_{Cu} .

Le courant électrique constant I est amené en un point A du matériau par un fil, perpendiculaire à la plaque, confondu avec l'axe (Az). Ce fil est relié au matériau par une électrode cylindrique de faible rayon. Ce courant électrique repart par un fil de même nature et fixé de la même manière au point D ; l'ensemble est représenté sur la figure 1.

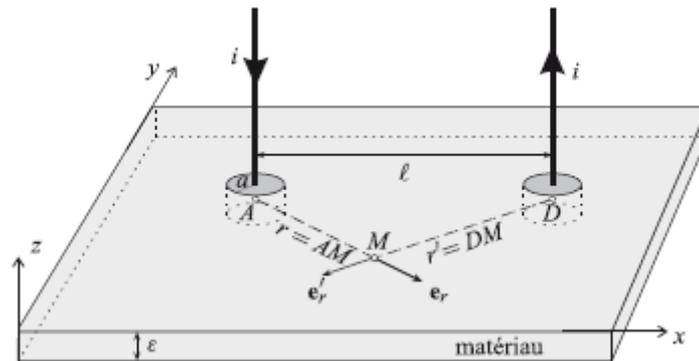


Figure 1 – Mesure directe de résistance d'une plaque mince conductrice

I-1) On considère tout d'abord une situation simplifiée, à symétrie cylindrique, dans laquelle on supprime le contact de départ en D . Le courant arrivant en A se répartit donc dans l'ensemble du matériau avec la symétrie de révolution d'axe (Az) : la densité volumique de courant \vec{J} en un point M s'y écrit $\vec{J}(M) = J(r)\vec{e}_r$, où r désigne la distance de M à l'axe (Az) et \vec{e}_r le vecteur unitaire radial de cet axe.

a) Exprimer $J(r)$ en fonction de r , ε et I .

b) On considère deux points M_1 et M_2 de la plaque et on note $r_1 = AM_1$ et $r_2 = AM_2$. Déterminer la différence de potentiel $V(M_1) - V(M_2)$ en fonction de iI , ε , γ et du quotient r_2/r_1 .

I-2) On remet en place le contact de départ du courant en D .

a) En procédant par superposition de deux situations analogues à celle de la question I-1, déterminer la nouvelle expression de $V(M_1) - V(M_2)$ en fonction de I , ε , γ , r_1 , r_2 , $r'_1 = DM_1$ et $r'_2 = DM_2$.

b) Que vaut cette différence de potentiel si M_1 et M_2 sont sur la médiatrice du segment AD ? Commenter ce résultat.

I-3) On note $\ell = AD$ et a le rayon des électrodes cylindriques de contact électrique en A et D ; ces électrodes sont formées d'un matériau métallique très bon conducteur électrique et sont donc considérées comme équipotentielles, de potentiels respectifs V_A et V_D . Montrer que si $\ell/a \gg 1$, la

résistance électrique de la plaque s'écrit sous la forme $R \approx R_0 \ln\left(\frac{\ell}{a}\right)$, où l'on exprimera R_0 en fonction de γ et ε .

I-4) *Application numérique* : l'épaisseur de la plaque de semi-conducteur est $\varepsilon = 1,0$ mm. On réalise le dispositif de la figure 1 avec $\ell = 2$ cm et $a = 0,5$ mm. La conductivité du matériau (silicium dopé) est $\gamma = 2,2 \times 10^4$ S·m⁻¹. Calculer R , commenter la valeur numérique ; la mesure de R est-elle facile ?

Partie II

CREATION D'UN CHAMP MAGNETIQUE INTENSE A L'AIDE D'UNE BOBINE A FIL DE CUIVRE

II-1) La bobine (figure 2, ci-après) est assimilée à un solénoïde d'axe Oz , de longueur L , de rayon R_{moy} avec $R_{moy} \ll L$. Les effets de bords sont négligés, le solénoïde est donc considéré comme infini. Il est constitué de spires jointives d'un fil de cuivre de diamètre d et de conductivité électrique γ_{Cu} . Chaque spire est parcourue par un courant I . Il comporte p couches de bobinage superposées.

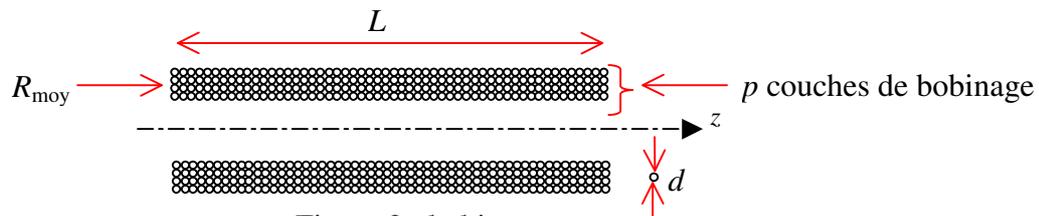


Figure 2 : bobine

- Combien y a-t-il de spires jointives par unité de longueur de solénoïde sur une seule couche de bobinage ?
- Combien de spires par unité de longueur comporte ce solénoïde ?
- Donner, en fonction de d , p , I et μ_0 , l'expression du champ magnétique créé à l'intérieur du solénoïde.
- Application numérique : $B = 2,0$ T, $d = 3,0$ mm, $I = 35$ A. Déterminer p .

II-2-a) En assimilant le rayon de chaque spire au rayon moyen R_{moy} , exprimer la longueur, L_{fil} de fil nécessaire à la réalisation de cette bobine en fonction de R_{moy} , d , p et L . Faire l'application numérique avec $L = 1,8$ m et $R_{moy} = 50$ cm.

- Exprimer en fonction de γ_{Cu} , de L_{fil} et de d la résistance électrique R_{elec} de la bobine.
- Application numérique : évaluer la puissance \mathcal{P}_J , dissipée par effet Joule dans la bobine. Commenter en comparant cette valeur à l'ordre de grandeur des puissances consommées par des appareils électroménagers usuels..

Partie III

UTILISATION DE SUPRACONDUCTEURS

Pour s'affranchir de l'effet Joule, on utilise pour les bobinages des matériaux supraconducteurs, qui ont la propriété de pouvoir transporter un courant sans dissipation au-dessous d'une température critique T_c .

III-1) On adopte un modèle microscopique de supraconducteur dans lequel les électrons de conduction (de charge $-e$ et de masse m_e), initialement au repos, sont mis en mouvement sous l'action d'un champ électrique \vec{E} , supposé uniforme et constant.

- Écrire l'équation du mouvement d'un électron.
- On note n la densité volumique d'électrons, supposée uniforme. Dédire de la question précédente une relation simple entre $\frac{\partial \vec{J}_e(M, t)}{\partial t}$ et $\vec{E}(M, t)$ (où $\vec{J}_e(M, t)$ est la densité de courant au point M à l'instant t).

III-2) On admet que la relation obtenue à la question II-2 reste valable même si le champ n'est ni uniforme ni constant et l'on se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

a) En utilisant les équations de Maxwell, montrer que le champ magnétique vérifie l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\text{rot}} \left(\overline{\text{rot}} (\vec{B}) \right) + \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} \right) = \vec{0}$$

où λ est une longueur dont on donnera l'expression.

b) Calculer λ pour une densité d'électrons de conduction $n = 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

III-3) Lorsqu'on plonge un supraconducteur dans un champ magnétique extérieur, il expulse ce champ. Cette propriété, qui porte le nom d'effet Meissner, est représentée sur la figure 3.

Pour expliquer l'effet Meissner, on postule une relation (équation de London) plus forte que l'équation (1) :

$$\overline{\text{rot}} \left(\overline{\text{rot}} (\vec{B}) \right) + \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} = \vec{0}$$

a) On considère un supraconducteur occupant le demi-espace $x > 0$ dans un système de coordonnées cartésiennes de repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On suppose que le champ à l'extérieur du supraconducteur ($x < 0$) est uniforme et vaut $B_0 \vec{e}_z$, et on admet que, pour $x > 0$, le champ créé s'écrit $B(x) \vec{e}_z$. Dans ces conditions, on peut montrer que la projection de \vec{B} sur \vec{e}_z une fonction continue partout dans l'espace. Exprimer $B(x)$ pour $x > 0$ en fonction de B_0 , x et λ .

b) En quoi ce modèle explique-t-il l'effet Meissner ?

c) Déterminer la densité de courant $\vec{J}_e(x)$ à l'intérieur du supraconducteur.

d) On introduit un noyau cylindrique supraconducteur dans un solénoïde illimité de section circulaire. Y a-t-il augmentation ou diminution de l'inductance linéique de ce solénoïde ? Cet effet dépend-il du courant I traversant le bobinage du solénoïde

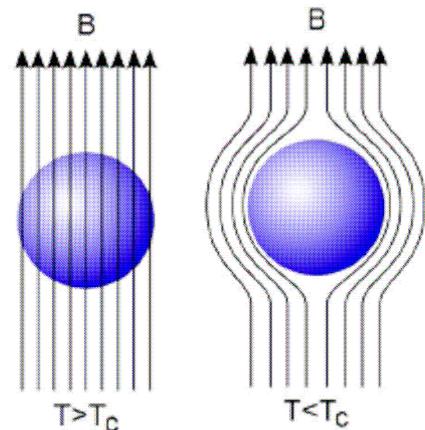


Figure 3. Effet Meissner dans une boule supraconductrice placée dans un champ magnétique lorsqu'elle est refroidie sous la température critique T_c . Les lignes sont les lignes de champ.

Partie IV

PUISSANCE DISSIPÉE DANS LE SUPRACONDUCTEUR LORS DES RÉGIMES TRANSITOIRES :

Si les supraconducteurs sont dépourvus de pertes en régime continu, il n'en est pas de même en régime variable. Pour les bobines alimentées en régime continu, ces pertes ont lieu lors des deux régimes transitoires qui correspondent en début d'utilisation de la bobine à l'installation du courant dans le conducteur, puis en fin d'utilisation de la bobine, lors de la redescente à zéro de ce courant.

On se propose ici déterminer l'ordre de grandeur de la puissance dissipée par unité de longueur du conducteur, lors de la première montée de courant, dans une situation dite de champ propre, c'est-à-dire lorsqu'une portion de conducteur est soumise aux variations temporelles du champ magnétique qu'il crée sur lui-même.

On ne s'intéresse ici qu'à la première montée du courant $I(t)$ dans le supraconducteur.

On suppose que cette première montée s'effectue, pendant une durée T , suivant une consigne en rampe de sorte que : $I(t) = \frac{I_0}{T} t$, où I_0 est la valeur finale du courant dans le supraconducteur.

On assimile le supraconducteur (figure 4) à un fil rectiligne infini suivant l'axe Oz , de rayon R . On adopte les coordonnées cylindriques.



Figure 4 : supraconducteur

Compte tenu des invariances du problème, la densité volumique de courant, notée \vec{J}_e , dans le supraconducteur ne dépend que de r et est portée par le vecteur \vec{e}_z . On a $\vec{J}_e = J_e(r)\vec{e}_z$. Pour un courant de transport I donné, la densité de courant n'est pas uniforme dans le supraconducteur, son amplitude vaut $\pm J_0$ ou 0, où J_0 est une constante. Ce courant se distribue de façon à protéger le centre du supraconducteur de toute variation de champ magnétique, de sorte qu'il se répartit, à un instant t de cette première étape, à la périphérie du supraconducteur dans la zone : $r_1(t) < r < R$ (figure 5).



Figure 5 : répartition du courant dans le supraconducteur

IV-1) On modélise la distribution de courant par $J_e(r, t) = 0$ pour $r < r_1(t)$ et $J_e(r, t) = J_0$ pour $R > r > r_1(t)$.

a) Déterminer en fonction de J_0 et de R la valeur maximale possible I_C , dite valeur critique du courant de transport de ce conducteur.

b) On définit le taux d'utilisation du supraconducteur par $u = \frac{I_0}{I_C}$. Exprimer u en fonction de J_0 , R et I_0 .

c) Déterminer la relation qui existe entre $I(t)$, J_0 , $r_1(t)$ et R .

d) En déduire l'expression de $r_1(t)$ en fonction de R , u , T et t .

e) Exprimer $r_1(T)$ en fonction de u et R .

IV-2) Le courant crée un champ magnétique dans le supraconducteur.

a) À l'aide des propriétés de symétries et d'invariance, préciser de quelle(s) variable(s) de l'espace dépend le champ magnétique \vec{B} dans le supraconducteur et par quel(s) vecteur(s) de base il est porté.

b) Par application du théorème d'Ampère, dans l'approximations des régimes quasi-stationnaires, sur une contour que l'on précisera, déterminer à l'instant t le champ magnétique $\vec{B}(r, t)$ dans la zone : $r \in [0, r_1(t)]$.

c) De même, déterminer en fonction de μ_0 , J_0 et $r_1(t)$, le champ magnétique $\vec{B}(r, t)$ dans la zone : $r \in [r_1(t), R]$.

d) Tracer l'allure de la fonction $\|\vec{B}(r, t)\|$ à un instant t , pour $r \in [0, R]$.

IV-3-a) Rappeler l'équation de Maxwell-Faraday. Donner le nom du phénomène physique régi par cette loi. Historiquement, à quel siècle a-t-elle été découverte ?

Pour les questions II-4-b) et II-4-c), on admettra que toute contribution du champ électrique, qui ne dépend que de l'espace ou que du temps, sera assimilée à la fonction nulle.

b) Que vaut le champ électrique $\vec{E}(r, t) = E(r, t)\vec{e}_z$ pour $r < r_1(t)$?

c) En remarquant que le champ électrique est continu en $r_1(t)$ et qu'il peut s'écrire sous la forme $\vec{E}(r, t) = E(r, t)\vec{e}_z$, montrer que $E(r, t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi T} \ln\left(\frac{r(t)}{r_1(t)}\right)$ pour $r \in [r_1(t), R]$.

IV-4) On note $p_V(r, t)$ la densité volumique locale et instantanée de puissance dissipée dans le supraconducteur.

a) Donner l'expression de $p_V(r, t)$ pour $r < R$.

b) Par intégration sur l'espace, en déduire, en fonction de μ_0 , I_0 , T , L_{supra} , u et t , l'expression de la puissance $\mathcal{P}_{elec}(t)$ dissipée dans une longueur L_{supra} de supraconducteur à l'instant t lors de la première montée de courant.

c) Par intégration sur le temps, déterminer l'énergie Q dissipée lors de la première montée du courant dans un supraconducteur de longueur L_{supra} en fonction de μ_0 , I_0 , L_{supra} et u .

d) Est-il utile d'augmenter la durée T d'établissement de ce courant pour réduire l'énergie dissipée dans le supraconducteur ?

Données

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}.$$

$$\text{masse de l'électron : } m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg.}$$

$$\text{charge de l'électron : } -e = -1,60 \times 10^{-19} \text{ C.}$$

$$\text{conductivité du cuivre } \gamma_{Cu} = 6 \times 10^7 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}.$$

Formulaire mathématique :

fonction f	primitive F
$x \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$	$\frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) - \frac{x^2}{4} + C^{te}$
$\ln(1 - \alpha x)$	$\frac{(1 - \alpha x) - (1 - \alpha x) \ln(1 - \alpha x)}{\alpha} + C^{te}$

On peut commuter les opérateurs $\overline{\text{rot}}(\)$ et $\frac{\partial}{\partial t}$ qui portent sur des variables indépendantes.

DANS LA BASE CARTESIENNE $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

$$\overline{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z}$$

$$\overline{\text{rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

DANS LA BASE CYLINDRIQUE $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

$$\overline{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f(r, \theta, z)}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f(r, \theta, z)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f(r, \theta, z)}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r(r, \theta, z))}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta(r, \theta, z)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z(r, \theta, z)}{\partial z}$$

$$\overline{\text{rot}}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$