

ÉLECTROMAGNÉTISME

Partie I

MINES-PONTS MP 2011

I-1-a) En régime stationnaire, l'intensité est la même à travers toute surface traversée par l'ensemble des lignes de courant. On considère donc une surface cylindrique S d'axe Az , de rayon r et d'épaisseur ε . L'intensité s'écrit alors $I = \iint_S \vec{J}(M) \cdot \vec{n}_s(M) dS = \iint_S J(r) \vec{e}_r(M) \cdot \vec{e}_r(M) dS$.

Comme $J(r)$ est uniforme sur S , il vient $I = J(r) \iint_S dS = J(r) 2\pi r \varepsilon$ d'où $J(r) = \frac{I}{2\pi r \varepsilon}$.

b) Dans le conducteur, on peut appliquer la loi locale d'Ohm $\vec{J}(M) = \gamma_{Cu} \vec{E}(M)$ d'où $\vec{E}(M) = \frac{I}{2\pi \gamma_{Cu} r} \vec{e}_r(M)$. Les lignes de champ sont donc des droites issues de l'axe Az

On calcule alors la circulation de \vec{E} sur un chemin quelconque orienté de M_1 vers M_2 , points de la plaque:

$$C_{M_1 M_2}(\vec{E}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot \vec{\tau} d\ell = \int_{r_1}^{r_2} E(r) \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{I}{2\pi \gamma_{Cu} \varepsilon} \frac{dr}{r} = \frac{I}{2\pi \gamma_{Cu} \varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

Mais on a aussi, puisque l'on est en régime constant, $C_{M_1 M_2}(\vec{E}) = \int_{M_1}^{M_2} -\text{grad}(V) \cdot \vec{\tau} d\ell = \int_{M_1}^{M_2} -dV = V(M_1) - V(M_2)$.

On en déduit $V(M_1) - V(M_2) = \frac{I}{2\pi \gamma_{Cu} \varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$

I-2-a) Les équations décrivant la situation étant linéaires, on peut appliquer le principe de superposition : la solution est la somme des solutions correspondant d'une part à une seule électrode passant par A et parcourue par un courant d'intensité I (créant la d.d.p.

$V_A(M_1) - V_A(M_2) = \frac{I}{2\pi \gamma_{Cu} \varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$) et d'autre part une seule électrode passant par D parcourue par

un courant d'intensité $-i$ (créant la d.d.p $V_D(M_1) - V_D(M_2) = \frac{-I}{2\pi \gamma_{Cu} \varepsilon} \ln\left(\frac{r'_2}{r'_1}\right)$).

On obtient donc $V(M_1) - V(M_2) = \frac{I}{2\pi \gamma_{Cu} \varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r_1} \times \frac{r'_1}{r'_2}\right)$

b) Si M_1 et M_2 sont sur la médiatrice du segment AD , alors $r_1 = r'_1$ et $r_2 = r'_2$ d'où $V(M_1) - V(M_2) = 0$. **Le plan médiateur de AD est donc une surface équipotentielle.**

I-3) En prenant M_1 sur la surface de l'électrode passant par A ($r_1 = a$, $r'_1 = \ell - a \approx \ell$ puisque $\ell \gg a$) et M_2 sur la surface de l'électrode passant par B , ($r_2 = \ell$, $r'_2 \approx a$), il vient

$V(M_1) - V(M_2) \approx \frac{I}{2\pi \gamma_{Cu} \varepsilon} \ln\left(\frac{\ell}{a} \times \frac{\ell}{a}\right)$. Par définition, la résistance est $R = \frac{V(M_1) - V(M_2)}{I}$ puis-

que l'intensité est orientée de M_1 vers M_2 . Il vient donc $R \approx \frac{1}{\pi \gamma_{Cu} \epsilon} \ln\left(\frac{\ell}{a}\right)$ qui est bien de la forme

proposée en posant $R_0 \approx \frac{1}{\pi \gamma_{Cu} \epsilon}$.

I-4) Application numérique :

Pour le semi-conducteur : $R \approx \frac{1}{\pi(2,2 \times 10^4)10^{-3}} \ln\left(\frac{2}{0,5 \times 10^{-1}}\right) = 53 \text{ m}\Omega$.

Pour le cuivre : $R \approx \frac{1}{\pi(6 \times 10^7)10^{-3}} \ln\left(\frac{2}{0,5 \times 10^{-1}}\right) = 19,6 \mu\Omega$.

Ces résistances sont très faible et leur mesure nécessite des précautions, en particulier dans les contacts entre les différents conducteurs. Mais, dans le cas du cuivre, un courant de l'ordre de 1A donne une tension de l'ordre de 20 μV ce qui est mesurable avec des appareils adaptés.

Partie II

CCP PSI 2014

II-1-a) Pour une longueur L et un diamètre d des spires, on a $N_1 = \frac{L}{d}$ spires sur une couche soit $n_1 = \frac{1}{d}$ spires par unité de longueur d'une couche.

b) Avec toutes les couches, il vient $n = \frac{p}{d}$ spires par unité de longueur du solénoïde.

c) Le solénoïde est supposé de longueur infini donc on sait que le champ magnétique à l'intérieur s'écrit $\vec{B} = n\mu_0 I \vec{e}_z$ soit $\vec{B} = \mu_0 \frac{pI}{d} \vec{e}_z$.

d) On a $p = \frac{Bd}{\mu_0 I}$. A.N. $p = \frac{2 \cdot 3 \times 10^{-3}}{(4\pi \times 10^{-7})35} = 136$.

II-2-a) La longueur d'une spire est $2\pi R_{moy}$ et il y en a nL donc la longueur de fil nécessaire est $L_{fil} = 2\pi R_{moy} \frac{pL}{d}$.

A.N. $L_{fil} = 2\pi \cdot 50 \times 10^{-2} \frac{(136)1,8}{3 \times 10^{-3}} = 2,56 \times 10^5 \text{ m}$ soit **256 km**.



intérieur d'une bobine d'IRM source Siemens <http://www.supraconductivite.fr/fr/index.php?p=applications-medical-irm-more>

b) On sait que la résistance d'un fil de longueur ℓ et de section s est $R_{elec} = \frac{1}{\gamma_{Cu}} \frac{\ell}{s}$. Ici, $\ell = L_{fil}$ et $s = \pi \frac{d^2}{4}$ donc

$R_{elec} = \frac{1}{\gamma_{Cu}} \frac{L_{fil}}{\pi \frac{d^2}{4}}$ soit $R_{elec} = \frac{1}{\gamma_{Cu}} \frac{4L_{fil}}{\pi d^2}$.

c) L'intensité est constante donc la puissance dissipée par effet Joule dans la bobine est $\mathcal{P} = R_{elec} I^2$ soit numériquement $\mathcal{P} = \frac{1}{6 \times 10^7} \frac{4(256 \times 10^3)}{\pi(3 \times 10^{-3})^2} 35^2 = 739 \text{ kW}$.

Les puissances consommées par les appareils ménagers usuels (radiateur, plaque électrique, aspirateur) sont de l'ordre de 1 kW. La valeur calculée ici n'est pas acceptable car elle nécessiterait un dispositif de refroidissement trop important.

Partie III

MINES-PONTS PSI 1999 ET CCP PSI 2014

III-1-a) On se place dans le référentiel lié au sol. Le système mobile est l'électron de masse m_e et de charge $(-e)$. On néglige le poids. Il n'est donc soumis qu'à la force électrique $\vec{F} = -e\vec{E}$

donc l'équation du mouvement s'écrit $m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$.

b) On sait que la densité de courant est $\vec{J}_e = n(-e)\vec{v}$ où n est la quantité d'électron par unité de volume et \vec{v} la vitesse d'ensemble des électrons contenus dans l'élément de volume centré en un point M . C'est donc un champ eulérien et, en reportant, il vient

$$\frac{m_e}{n(-e)} \frac{\partial \vec{J}_e(M, t)}{\partial t} = -e\vec{E}(M, t) \text{ ou encore } \frac{\partial \vec{J}_e(M, t)}{\partial t} = \frac{ne^2}{m_e} \vec{E}(M, t).$$

III-2-a) L'équation de Maxwell-Ampère $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{J}_e + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Dans l'approximation des régimes quasi stationnaire, le terme $\epsilon_0 \mu_0 \left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|$ est négligé devant $\mu_0 \vec{J}_e$. Il reste $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{J}_e$

puis $\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})) = \mu_0 \frac{\partial \vec{J}_e}{\partial t} = \mu_0 \frac{ne^2}{m_e} \vec{E}(M, t)$. On peut prendre le rotationnel de cette équation et commuter les opérateurs $\overrightarrow{\text{rot}}(\)$ et $\frac{\partial}{\partial t}$ qui portent sur des variables indépendantes. On a donc

$\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})) = \mu_0 \frac{ne^2}{m_e} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}(M, t))$. L'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ permet

alors d'écrire $\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})) = -\mu_0 \frac{ne^2}{m_e} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ soit $\frac{\partial}{\partial t} \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})) + \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} \right) = \vec{0}$ en posant

$$\lambda^2 = \frac{m_e}{\mu_0 ne^2}$$

$$\text{b) A.N. } \lambda^2 = \sqrt{\frac{9,1 \times 10^{-31}}{(4\pi \times 10^{-7}) 10^{28} (1,6 \times 10^{-19})^2}} = \mathbf{53 \text{ nm.}}$$

III.3-a) Avec $\vec{B} = B(x)\vec{e}_z$, on a $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = -\frac{dB(x)}{dx}\vec{e}_y$ et $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})) = -\frac{d^2B(x)}{dx^2}\vec{e}_z$ donc l'équation de London devient $-\frac{d^2B(x)}{dx^2}\vec{e}_z + \frac{B(x)}{\lambda^2}\vec{e}_z = \vec{0}$ soit, en projection, $\frac{d^2B(x)}{dx^2} - \frac{B(x)}{\lambda^2} = 0$.

On peut intégrer en $B(x) = ae^{-x/\lambda} + be^{+x/\lambda}$. La condition limite pour x tendant vers $+\infty$ (B ne peut être infini) impose $b = 0$.

Alors, la condition de continuité en $x = 0$ conduit à $a = B_0$. On en déduit $B(x) = B_0 e^{-x/\lambda}$.

b) Le modèle prévoit une décroissance exponentielle du champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur, avec une longueur caractéristique de décroissance égale à λ : en dehors d'une faible épaisseur de quelques centaines de nm à partir de la surface, on peut considérer que le champ magnétique est nul à l'intérieur du supraconducteur, ce qui explique l'effet Meissner.

c) La relation de Maxwell-Ampère dans l'ARQS conduit à $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{J}_e$ d'où

$\vec{J}_e = -\frac{1}{\mu_0} \frac{dB(x)}{dx} \vec{e}_y$ soit $\vec{J}_e = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda} e^{-x/\lambda} \vec{e}_y$. Cette densité de courant n'existe également que dans une très faible épaisseur.

d) Par définition, le coefficient d'inductance propre est $L = \frac{\Phi}{I}$ où $\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n}_S dS$

est le flux du champ magnétique créé par le solénoïde, à travers les spires du solénoïde. Comme le supraconducteur annule le champ dans la plus grande partie de son volume, le flux magnétique est plus faible donc **L diminue en présence du supraconducteur**.

On sait que le champ magnétique créé par le solénoïde, qui existe en dehors du supraconducteur, est proportionnel à I donc **la diminution sera plus importante pour I plus grand**.

Partie IV

CCP PSI 2014

IV-1-a) L'intensité maximale correspond au cas où la densité J_0 traverse toute la section soit

$$I_C = J_0 \pi R^2.$$

b) Il vient immédiatement $u = \frac{I_0}{I_C} = \frac{I_0}{\pi R^2 J_0}$.

c) La densité de courant est uniforme dans la zone $R > r > r_1(t)$ et vaut J_0 donc, à l'instant t , on a $I(t) = \pi(R^2 - r_1^2(t))J_0$.

d) On en déduit $\frac{I_0}{T} t = \pi(R^2 - r_1^2(t))J_0$ soit $R^2 - r_1^2(t) = \frac{I_0}{\pi J_0 T} t$. Avec $u = \frac{I_0}{\pi R^2 J_0}$, il vient

$r_1^2(t) = R^2 - uR^2 \frac{t}{T}$ d'où $r_1(t) = R\sqrt{1 - u \frac{t}{T}}$ (en prenant l'unique racine positive).

La zone traversée par le courant augmente donc avec t .

e) On obtient facilement $r_1(T) = R\sqrt{1 - u}$.

IV-2-a) La distribution de courant est invariante par :

- symétrie par rapport au plan passant par M et contenant l'axe Oz . Le champ magnétique est donc perpendiculaire ce plan : il est porté par $\vec{e}_\theta(M)$ dans la base cylindrique.

- rotation d'un angle θ quelconque et translation le long de Oz donc $\|\vec{B}\|$ ne dépend pas de θ ni de z . Il reste donc $\vec{B}(M, t) = B(r, t) \vec{e}_\theta(M)$.

Les lignes de champ sont donc des cercles centrés sur l'axe Oz .

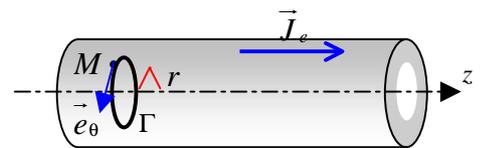
b) On applique le théorème d'Ampère sur un contour Γ circulaire de rayon r , centré sur Oz et orienté comme \vec{e}_θ , comme indiqué sur la figure.

Dans l'ARQS, le théorème d'Ampère s'écrit $C_\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 I_\Gamma$ avec :

- $C_\Gamma(\vec{B}) = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot \vec{\tau} dl = \oint_\Gamma B(r, t) \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta dl = B(r, t) \oint_\Gamma dl = B(r, t) 2\pi r$;

- $I_\Gamma = 0$ pour $r < r_1(t)$.

On en déduit $B(r, t) = 0$ pour $r < r_1(t)$.



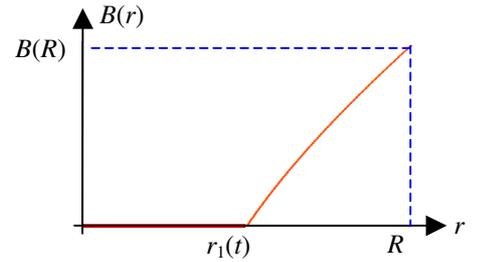
c) Pour $r \in [r_1(t), R]$, on peut écrire $I_r = \iint J_0 dS = J_0 \pi (r^2 - r_1^2(t))$ d'où

$$B(r, t) = \frac{\mu_0 J_0}{2r} (r^2 - r_1^2(t)).$$

d) Pour $r \in [r_1(t), R]$, on peut écrire

$$B(r, t) = B_0 \left(r - \frac{r_1^2(t)}{r} \right). \text{ Le terme } \frac{r_1^2(t)}{r} \text{ devient vite négligeable}$$

devant r et la courbe devient pratiquement rectiligne pour r proche de R . Elle est tracé ci-contre.



IV-3-a) L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit

$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Sa forme intégrale décrit le phénomène d'**induction électromagnétique**. Elle a été proposée par Maxwell en 1865 à partir des travaux de Faraday (1831).

b) Pour $r < r_1(t)$, on a vu $B = 0$ donc $-\frac{\partial E(r, t)}{\partial r} = 0$ d'après l'expression de $\text{rot}(E(r, t)\vec{e}_z)$. On en déduit que E ne dépend que de t . D'après l'hypothèse de l'énoncé, on a donc $E = 0$ dans ce cas.

c) Pour $r \in [r_1(t), R]$, $E(r, t)$ vérifie l'équation $-\frac{\partial E(r, t)}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0 J_0}{2r} (r^2 - r_1^2(t)) \right)$

soit $\frac{\partial E(r, t)}{\partial r} = -\frac{\mu_0 J_0}{2r} \frac{dr_1^2(t)}{dt}$ (car r_1 ne dépend que de t).

$$\text{On intègre en } E(r, t) - E(r_1, t) = -\frac{\mu_0 J_0}{2} \frac{dr_1^2(t)}{dt} \ln\left(\frac{r}{r_1(t)}\right).$$

Comme $E(r)$ est continu en $r = r_1$, on a $\lim_{r \rightarrow r_1^-} E(r) = \lim_{r \rightarrow r_1^+} E(r)$ soit $E(r_1, t) = 0$. On obtient

$$\text{donc } E(r, t) = -\frac{\mu_0 J_0}{2} \frac{dr_1^2(t)}{dt} \ln\left(\frac{r}{r_1(t)}\right).$$

Mais comme $r_1^2(t) = R^2 - \frac{I_0}{\pi J_0 T} t$ d'après III-1-d donc $\frac{dr_1^2(t)}{dt} = -\frac{I_0}{\pi J_0 T}$ et il vient

$$E(r, t) = \frac{\mu_0 J_0}{2} \frac{I_0}{\pi J_0 T} \ln\left(\frac{r}{r_1(t)}\right) \text{ ou encore } E(r, t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi T} \ln\left(\frac{r(t)}{r_1(t)}\right).$$

IV-4-a) La densité volumique locale et instantanée de puissance dissipée dans le supraconducteur est $p_v(r, t) = \vec{J}_e(r, t) \cdot \vec{E}(r, t)$.

On a donc $p_v(r, t) = 0$ pour $r \in [0, r_1(t)]$ et $p_v(r, t) = \frac{\mu_0 I_0 J_0}{2\pi T} \ln\left(\frac{r(t)}{r_1(t)}\right)$ si $r \in [r_1(t), R]$

b) La puissance instantanée totale dissipée dans le supraconducteur est alors

$$\mathcal{P}_{elec}(t) = \iiint p_v(r, t) d\tau = \int_0^{L_{supra}} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{r_1(t)}^R \frac{\mu_0 I_0 J_0}{2\pi T} \ln\left(\frac{r(t)}{r_1(t)}\right) r dr = 2\pi L_{supra} \frac{\mu_0 I_0 J_0}{2\pi T} \int_{r_1(t)}^R \ln\left(\frac{r(t)}{r_1(t)}\right) r dr.$$

(Remarque : les calculs qui suivent sont qualifiés dans l'énoncé de Mines Ponts 1999 de longs et fastidieux et le résultat est donné. Mais CCP 2014 les demandait !)

En utilisant l'expression donnée par l'énoncé, il vient

$$\mathcal{P}_{elec}(t) = \mu_0 \frac{I_0 J_0 L_{supra}}{T} \left[\frac{r^2}{2} \ln \left(\frac{r}{r_1(t)} \right) - \frac{r^2}{4} + c \right]_{r_1(t)}^R = \mu_0 \frac{I_0 J_0 L_{supra}}{T} \left(\frac{R^2}{2} \ln \left(\frac{R}{r_1(t)} \right) - \frac{R^2}{4} - \frac{r_1^2(t)}{2} \ln \left(\frac{r_1(t)}{r_1(t)} \right) + \frac{r_1^2(t)}{4} \right).$$

Comme $J_0 = \frac{I_0}{\pi R^2 u}$ d'après III-1-a et $r_1(t) = R \sqrt{1 - u \frac{t}{T}}$ d'après III-1-d, il reste

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{elec}(t) &= \mu_0 \frac{I_0}{\pi R^2 u} \frac{I_0 L_{supra}}{T} \left(\frac{R^2}{2} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{1 - u \frac{t}{T}}} \right) + \frac{1}{4} \left(-R^2 + R^2 \left(1 - u \frac{t}{T} \right) \right) \right) \\ &= \mu_0 \frac{1}{\pi R^2 u} \frac{I_0^2 L_{supra}}{T} \left(-\frac{R^2}{4} \ln \left(1 - u \frac{t}{T} \right) - \frac{R^2}{4} u \frac{t}{T} \right) \end{aligned}$$

soit $\mathcal{P}_{elec}(t) = -\frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi u T} L_{supra} \left(\ln \left(1 - u \frac{t}{T} \right) + u \frac{t}{T} \right).$

c) On a alors $Q = \int_0^T \mathcal{P}_{elec}(t) dt = -\frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi u T} L_{supra} \int_0^T \left(\ln \left(1 - u \frac{t}{T} \right) + u \frac{t}{T} \right) dt$

$$= -\frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi u T} L_{supra} \left[\frac{\left(1 - u \frac{t}{T} \right) - \left(1 - u \frac{t}{T} \right) \ln \left(1 - u \frac{t}{T} \right)}{u/T} + \frac{u}{T} \frac{t^2}{2} \right]_0^T \text{ en utilisant l'expression donnée}$$

par l'énoncé.

Il reste $Q = -\frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi u T} L_{supra} \left(\frac{(1-u) - (1-u) \ln(1-u)}{u/T} + \frac{uT}{2} - \frac{T}{u} \right)$ d'où

$$Q = \frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi u^2} L_{supra} \left(u + (1-u) \ln(1-u) - \frac{u^2}{2} \right).$$

d) On constate que l'énergie dissipée ne dépend pas de T ; il n'est donc pas utile de modifier cette valeur.

Par contre, elle dépend de u , c'est-à-dire de l'intensité I_0 maximum que l'on fait passer. Un tracé de $Q(u)$ montre que Q est une fonction croissante de u , comme on pouvait s'y attendre.