MÉCANIQUE DU POINT

D'APRES CENTRALE PC 2013

1) En l'absence de champ magnétique, la force de Lorentz se réduit à $\vec{F}_E = q\vec{E}$. Comme le poids est $\vec{F}_P = m\vec{g}$. Pour une charge $q = -e$. Le rapport des modules est donc $\frac{\|\vec{F}_P\|}{\|\vec{F}_E\|} = \frac{m\|\vec{g}\|}{e\|\vec{E}\|}$ $= \frac{m\|\vec{g}\|}{e\frac{m}{e}\alpha} = \frac{\|\vec{g}\|}{\alpha}$ soit numériquement $\frac{\|\vec{F}_P\|}{\|\vec{F}_E\|} = \frac{10}{10^{16}} \approx \mathbf{10^{-15}} \ll 1$.

On peut donc négliger le poids de l'électron devant la force générée par le champ électrique.

2) On cherche à écrire $\mathcal{P} = q^\alpha\, \varepsilon_0^\beta\, c^\gamma\, a^\delta$.

- q est une charge électrique et l'on peut noter dim(q) = dim(Q) ;
- à l'aide de la relation donnant le champ électrique crée par une particule ponctuelle $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$, on obtient $\dim(\varepsilon_0) = \dim(Q)\,L^{-2}\dim^{-1}\left(\|\vec{E}\|\right)$;
- on peut alors utiliser la définition de la puissance mécanique $\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v}$ avec la force électrique $\vec{F}_E = q\vec{E}$ d'où $\dim(\mathcal{P}) = \dim(Q)\dim\left(\|\vec{E}\|\right)\mathrm{LT}^{-1}$;
- c est la vitesse de la lumière donc $\dim(c) = \mathrm{LT}^{-1}$ et a une accélération donc $\dim(a) = \mathrm{LT}^{-2}$.

En reportant, il vient

$$\dim(Q)\dim\left(\|\vec{E}\|\right)\mathrm{LT}^{-1} = \dim^\alpha(Q)\dim^\beta(Q)\mathrm{L}^{-2\beta}\dim^{-\beta}\left(\|\vec{E}\|\right)\mathrm{L}^\gamma\mathrm{T}^{-\gamma}\mathrm{L}^\delta\mathrm{T}^{-2\delta}.$$

On en déduit le système : $\begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 1 = -\beta \\ 1 = -2\beta + \gamma + \delta \\ -1 = -\gamma - 2\delta \end{cases}$.

Il vient alors facilement $\begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 2 \\ -1 = \gamma + \delta \\ -1 = -\gamma - 2\delta \end{cases}$ puis $\begin{cases} \delta = 2 \\ \gamma = -3 \end{cases}$. On peut donc proposer une expression de la forme $\boxed{\mathcal{P} = k\frac{e^2}{\varepsilon_0 c^3}a^2}$ où k est une constante sans dimension.

3-a) On se place dans le référentiel lié aux plaques. Le système mobile étudié est la particule chargée. En négligeant le poids, le principe fondamental de la dynamique s'écrit $m\vec{a} = (-e)\vec{E}_0$ soit en projection sur $\vec{e}_x$, $m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = m\alpha$. On intègre en $\frac{dx(t)}{dt} = \alpha t + A$. On prend comme instant initial l'instant d'entrée dans la cavité, on peut donc poser $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0$ d'où $A = v_0$, On intègre alors en $x(t)=\alpha\dfrac{t^2}{2}+v_0t+x_0$. En prenant l'origine des positions à l'entrée de la cavité, il vient $x_0 = 0$ et il reste $x(t)=\alpha\dfrac{t^2}{2}+v_0t$. La durée de traversée de la cavité T est alors telle que $\boxed{d=\alpha\dfrac{T^2}{2}+v_0T}$.

b) T est racine du trinôme $\alpha\dfrac{T^2}{2}+v_0T-d=0$ soit $T=\dfrac{-v_0+\sqrt{v_0^2+2\alpha d}}{\alpha}$ en ne gardant que la racine positive. On peut donc écrire $\boxed{T=\dfrac{v_0}{\alpha}\left(\sqrt{1+\dfrac{2\alpha d}{v_0^2}}-1\right)}$.

On en déduit $v_1=\alpha T+v_0$ soit $\boxed{\vec{v}_1=v_0\sqrt{1+\dfrac{2\alpha d}{v_0^2}}\,\vec{e}_x}$

4-a) On note $v=\left\|\vec{v}\right\|$ dans la suite.

On sait que l'énergie potentielle d'une particule de charge q placée dans un potentiel électrique V est $E_P = qV$. Son énergie mécanique est donc $E_M=\dfrac{1}{2}mv^2+qV$. La variation d'énergie mécanique est due à la puissance **perdue** pendant la durée de transit qui est pratiquement T. Comme l'accélération est constante, la puissance rayonnée l'est aussi d'après la formule de Larmor et l'énergie perdue est donc $-\mathcal{P}T$.

On peut donc écrire pour un électron $\left(\dfrac{1}{2}mv_1'^2-eV(d)\right)-\left(\dfrac{1}{2}mv_0^2-eV(0)\right)=-\mathcal{P}T$ d'où

$$\frac{1}{2}mv_1'^2=-\mathcal{P}T+\frac{1}{2}mv_0^2-e\big(V(0)-V(d)\big).$$

Comme $V(d)-V(0)=U=-\dfrac{m}{e}\alpha d$ et $\mathcal{P}=m\tau a^2$, il reste $\dfrac{1}{2}mv_1'^2=-m\tau a^2T+\dfrac{1}{2}mv_0^2+m\alpha d$ d'où $v_1'^2=v_0^2+2\left(-\tau a^2T+\alpha d\right)$. Comme $v_1^2=v_0^2+2\alpha d$, il reste $\boxed{v_1'^2=v_1^2-2\tau a^2T}$.

b) Comme la perturbation est supposée faible, on peut supposer $\dfrac{2\tau a^2T}{v_1^2}\ll 1$ et faire le développement limité $v_1'=v_1\sqrt{1-\dfrac{2\tau a^2T}{v_1^2}}\approx v_1\left(1-\dfrac{\tau a^2T}{v_1^2}+O\left(\dfrac{\tau a^2T}{v_1^2}\right)\right)\approx v_1-\dfrac{\tau a^2T}{v_1}$ qui est bien de la forme proposée en posant $\boxed{\xi=\tau a^2}$.

5-a) Entre deux tubes, on peut appliquer le résultat vu plus haut (sans les pertes dues au rayonnement) : $\left(\dfrac{1}{2}mv_S^2+eV_S(d)\right)-\left(\dfrac{1}{2}mv_E^2+eV_E\right)=0$ soit $E_{CS}-E_{CE}=e\left(V_E-V_S\right)=eU_C$.

À la sortie du $n^{\text{ième}}$ tube, on a traversé $n-1$ zone d'accélération donc $E_{Cn}=(n-1)eU_C+E_{C0}$ avec $E_{C0}=eU_0$ l'énergie cinétique de la pré-accélération.

On a donc $\boxed{E_{Cn}=eU_0+(n-1)eU_C}$.

b) Comme $E_C=\dfrac{1}{2}mv_n^2$, il vient $\boxed{v_n=\sqrt{2\dfrac{e}{m}\left(U_0+(n-1)U_C\right)}}$.

A.N. $v_n=\sqrt{2\dfrac{1{,}6\times10^{-19}}{1{,}6\times10^{-27}}\left(200\times10^3+(10-1)2000\times10^3\right)}$ = **6×10^7 m·s^{-1}**.

On a donc $v_n/c=6\times10^7/3\times10^8=0{,}2<1/3$: les protons **ne sont donc pas relativistes**.

6-a) En présence uniquement d'un champ magnétique, le proton est soumis à la force $\vec{F}_B = e\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right)$ et reçoit le travail élémentaire $\delta W = \vec{F}_B \cdot d\vec{r} = \vec{F}_B \cdot \vec{v}dt = e\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{v}dt = 0$.

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors $E_{C2} - E_{C1} = W = 0$. L'énergie cinétique de la particule ne varie pas donc la **norme** de sa vitesse est constante : le mouvement est **uniforme**.

b) Avec $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_z$, la force s'écrit $\vec{F}_B = eB_0\left(\vec{v} \wedge \vec{e}_z\right)$ et sa projection sur $\vec{e}_z$ $F_{Bz} = eB_0\left(\vec{v} \wedge \vec{e}_z\right) \cdot \vec{e}_z$ est nulle d'après les propriétés du produit vectoriel.

Dans le référentiel lié au synchrotron, le principe fondamental de la dynamique $m_P\vec{a} = \vec{F}_B$ se projette donc sur $\vec{e}_z$ en $m_P \dfrac{dv_z}{dt} = 0$, ce qui s'intègre en $v_z = v_z(t=0)$. Or par hypothèse, $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0$ est perpendiculaire à $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_z$ donc $v_z = 0$ quel que soit *t*.

Une nouvelle intégration conduit à $\boxed{z = z(t=0)}$ constant. La trajectoire est donc **plane**, dans le plan perpendiculaire à *Oz*.

c) Puisque $v_z = 0$ dans la base cartésienne indiquée sur la figure, on a $\vec{F}_B = eB_0\left(\left(v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y\right) \wedge \vec{e}_z\right) = eB_0\left(-v_x\vec{e}_y + v_y\vec{e}_x\right)$ et le principe fondamental de la dynamique conduit à

$$\begin{cases} m_P \dfrac{dv_x}{dt} = eB_0 v_y & (1) \\ m_P \dfrac{dv_y}{dt} = -eB_0 v_x & (2) \end{cases}$$

. La grandeur $\boxed{\dfrac{eB_0}{m_P}}$ étant homogène à l'inverse d'un temps, on peut la noter ω.

On note $\underline{v}(t) = v_x(t) + iv_y(t)$. En faisant la combinaison $(1) + i \times (2)$ il vient $\dfrac{d\left(v_x + iv_y\right)}{dt} = \omega\left(v_y - iv_x\right) = -i\omega\left(v_x + iv_y\right)$ que l'on peut écrire $\dfrac{d\underline{v}(t)}{dt} = -i\omega\underline{v}(t)$ ou encore $\dfrac{d\underline{v}(t)}{dt} + i\omega\underline{v}(t) = 0$. La solution est $\underline{v}(t) = \underline{A}e^{-i\omega t}$. En $t = 0$, cette expression conduit à $\underline{A} = \underline{v}(t=0)$ $= v_0\cos(\alpha) + i\sin(\alpha) = v_0e^{i\alpha}$.

Il vient alors $\boxed{\underline{v}(t) = v_0e^{i(\omega t + \alpha)}}$.

d) On intègre en prenant comme condition initiale $x(t=0) = 0$ et $y(t=0) = 0$ et il vient $\underline{r}(t) = \dfrac{v_0}{i\omega}e^{i(\omega t+\alpha)} - \dfrac{v_0}{i\omega}e^{i\alpha}$ en notant $\underline{r} = x(t) + iy(t)$ .En prenant partie réelle et partie imaginaire, il vient

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = \dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t + \alpha) - \dfrac{v_0}{\omega}\sin(\alpha) \\ y(t) = -\dfrac{v_0}{\omega}\cos(\omega t + \alpha) + \dfrac{v_0}{\omega}\cos(\alpha) \end{cases}}$$

On constate que

$$\left(x(t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\alpha)\right)^2 + \left(y(t) - \frac{v_0}{\omega}\cos(\alpha)\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2\sin^2(\omega t + \alpha) + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2\cos^2(\omega t + \alpha)$$

donc $\left(x(t) + \dfrac{v_0}{\omega}\sin(\alpha)\right)^2 + \left(y(t) - \dfrac{v_0}{\omega}\cos(\alpha)\right)^2 = \left(\dfrac{v_0}{\omega}\right)^2$.

C'est l'équation de la trajectoire dans la base cartésienne. On reconnaît l'équation d'un **cercle** centré en $\left(x_C = -\dfrac{v_0}{\omega}\sin(\alpha),\ y_C = \dfrac{v_0}{\omega}\cos(\alpha)\right)$ de rayon $\boxed{R = \dfrac{v_0}{\omega} = \dfrac{m_P v_0}{eB_0}}$.

e) D'après la question précédente, on a $v_0 = R\omega$ où v_0 est la vitesse linéaire. ω est donc la **vitesse angulaire de rotation** du proton sur sa trajectoire circulaire.

7-a) Bien que l'action du champ $\vec{B}_0$ ne change pas la vitesse de la particule, celle-ci possède l'accélération $a = \dfrac{v^2}{R} = \omega v = \dfrac{eB_0}{m_e}v$ dans son mouvement circulaire (en l'absence de rayonnement).

En utilisant cette expression dans la relation de Larmor, il vient $\mathcal{P} = \dfrac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(\dfrac{eB_0}{m_e}v\right)^2$. Comme $E_C = \dfrac{1}{2}m_e v^2$, on obtient $\boxed{\mathcal{P} = \dfrac{e^4 B_0{}^2}{3\pi\varepsilon_0 c^3 m_e{}^3}E_C}$.

Dans le référentiel lié au synchrotron, il n'y a pas d'énergie potentielle associée au champ magnétique et la variation de l'énergie mécanique se réduit à celle de l'énergie cinétique. Cette variation est due à la puissance perdue par rayonnement. On peut donc écrire $\dfrac{dE_C}{dt} = -\dfrac{e^4 B_0{}^2}{3\pi\varepsilon_0 c^3 m_e{}^3}E_C$ ou encore $\dfrac{dE_C}{dt} = -\dfrac{E_C}{\tau'}$ en posant $\boxed{\tau' = \dfrac{3\pi\varepsilon_0 c^3 m_e{}^3}{e^4 B_0{}^2}}$. On a alors $\boxed{E_C = E_{C0}e^{-t/\tau'}}$: τ' apparaît comme la durée caractéristique de décroissance de l'énergie cinétique.

b) L'énergie rayonnée pendant un tour de durée T est $\Delta E_C = \mathcal{P}\,T$ avec $T = \dfrac{2\pi R_0}{v}$.

Avec l'expression $a = \dfrac{v^2}{R_0}$ de l'accélération, la relation de Larmor devient $\mathcal{P} = \dfrac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(\dfrac{v^2}{R_0}\right)^2$ et l'on obtient $\Delta E_C = \dfrac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dfrac{v^4}{R_0{}^2}\dfrac{2\pi R_0}{v}$ soit $\boxed{\Delta E_C = \dfrac{e^2}{3\varepsilon_0 R_0}\dfrac{v^3}{c^3}}$..

c) Avec le même nombre de chiffres significatifs de l'énoncé, on obtient $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}9999999983^2}}$ = **5423,26145**.

d) On peut écrire $\Delta E_C = \gamma^4 \dfrac{e^2}{3\varepsilon_0 R_0}\dfrac{v^3}{c^3}$ soit numériquement $\Delta E_C = 5423^4 \dfrac{\left(1{,}6\times10^{-19}\right)^2}{3\times 8{,}854\times10^{-12}\ \times 56}0{,}999999983^3$ = $1{,}49\times10^{14}$ J ou encore **93 keV** (car 1 eV = $1{,}6\times10^{-19}$ J).

e) On a vu que $T_0 = \dfrac{2\pi R_0}{v}$.

A.N. La précision est limitée par celle indiquée sur la valeur du rayon R_0.

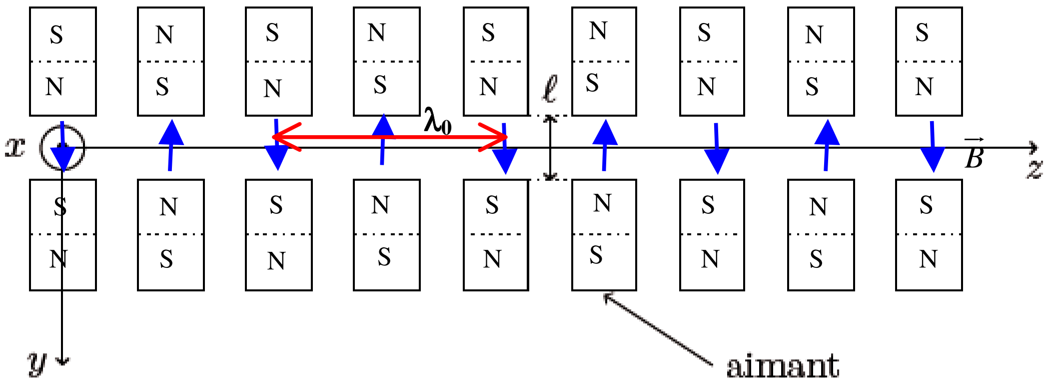
$T_0 = \dfrac{2\pi\ 56}{0{,}99\times3\times10^8}$ = **$1{,}2\times10^{-6}$ s**.

L'électron aura perdu un pourcentage p de son énergie initiale, soit pE_0 au bout de $n = \dfrac{pE_0}{\Delta E_C}$ tours (puisqu'il en perd ΔE_C à chaque tour) ce qui correspond à la durée $\boxed{\tau_{10\%} = \dfrac{pE_0}{\Delta E_C}T_0}$.

A.N. $\tau_{10\%} = \dfrac{0{,}1\times2{,}75\times10^6}{93}1{,}2\times10^{-6}$ = **3,5 ms**. Cette durée est faible, un contrôle électronique du nombre de tours parcourus est nécessaire.

8) Pour un aimant droit, les lignes de champ magnétique sortent du pôle Nord et rentrent vers le pôle sud. En ne tenant compte que de la composante principale de ce champ, on peut poser $\vec{B} = B(z)\vec{e}_y$

La fonction $B(z)$ est périodique donc se décompose en série de Fourier. En prenant l'origine des positions indiquée sur le schéma et en ne gardant que le fondamental, on peut poser $B(z) = B_0 \cos\left(2\pi\dfrac{z}{\lambda_0}\right)$ où λ_0 est la période spatiale de la répartition des aimants.



L'électron est alors soumis à la force $\vec{F} = (-e)\left(\vec{v} \wedge B(z)\vec{e}_y\right)$. La trajectoire restant dans le plan xOz formé par la vitesse initiale et le champ magnétique qui lui est perpendiculaire, on a $\vec{v} = v_x(t)\vec{e}_x + v_z(t)\vec{e}_z$ d'où $\vec{F} = (-e)\left(v_x(t)B(z)\vec{e}_z - v_z(t)B(z)\vec{e}_x\right)$ et le principe fondamendal de la dynamique appliqué à l'électron dans le référentiel lié à l'onduleur s'écrit

$$\begin{cases} m_e \dfrac{dv_x(t)}{dt} = ev_z(t)B(z) \\ m_e \dfrac{dv_y(t)}{dt} = 0 \\ m_e \dfrac{dv_z(t)}{dt} = -ev_x(t)B(z) \end{cases}$$

On obtient immédiatement $v_y = \text{Cte} = 0$ d'après la condition initiale. En considérant que $v_x << v_z$ à chaque instant comme dans l'état initial, on peut aussi écrire $\dfrac{dv_z(t)}{dt} = 0$ d'où $v_z = \text{Cte} = v_0$ d'après la condition initiale.

Il reste donc $m_e \dfrac{dv_x(t)}{dt} = ev_0 B_0 \cos\left(2\pi\dfrac{z}{\lambda_0}\right)$. L'accélération de l'électron est donc de la forme $a = \omega v_0 \cos\left(2\pi\dfrac{z}{\lambda_0}\right)\vec{e}_x$. L'expression de Larmor conduit alors à $\mathcal{P} = \dfrac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\omega^2 v_0^{\,2}\cos^2\left(2\pi\dfrac{z}{\lambda_0}\right)$ soit, en moyenne sur une période du champ magnétique, $\langle\mathcal{P}\rangle = \dfrac{e^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}\omega^2 v_0^{\,2}$ ou encore $\boxed{\langle\mathcal{P}\rangle = \dfrac{e^4 B_0^{\,2}}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m_e^{\,3}}E_c}$ en prenant $E_C = \dfrac{1}{2}m_e v_0^{\,2}$.